



This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 14453

**To cite this version** : Jugier, Rémi and Joly, Laurent and Brancher, Pierre and Fontane, Jérôme [Instabilités bidimensionnelles d'un dipôle visqueux](#). (2015)  
In: Acte du 22ème Congrès Français de Mécanique - CFM 2015, 24 August 2015 - 28 August 2015 (Lyon, France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Instabilités bidimensionnelles d'un dipôle visqueux

R.Jugier<sup>a</sup>, L.Joly<sup>a</sup>, P.Brancher<sup>b</sup> & J.Fontane<sup>a</sup>

a. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-Supaéro), Université de Toulouse, 31055 Toulouse Cedex 4.

remi.jugier@isae.fr, laurent.joly@isae.fr, jerome.fontane@isae.fr

b. Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, INPT, UPS, Université de Toulouse, F-31400 Toulouse.  
brancher@imft.fr

## Résumé

*L'analyse de stabilité linéaire du dipôle de Lamb-Chaplygin (LCD) menée par Brion et al. [1] est étendue à une famille de dipôles visqueux de Lamb-Oseen (LOD) de plus petit rapport d'aspect  $a/b$ , où  $a$  est le rayon caractéristique des deux tourbillons et  $b$  leur distance de séparation.*

*En ce qui concerne le LCD, une famille d'instabilités à grande longueur d'onde, présentant un taux de croissance maximal à la limite bidimensionnelle, a récemment été découverte par Brion et al. [1]. Ces auteurs suggèrent que la fuite de vorticité de perturbation dans le sillage du dipôle est le principal moteur de l'instabilité. Or le LCD est un modèle de dipôle particulier, qui n'exhibe pas de traîne visqueuse et présente une distribution de vorticité   dérivée discontinue à la frontière de la zone de recirculation. Brion et al. [1] ont donc également procédé à un premier examen de la stabilité bidimensionnelle du LOD, qui présente une traîne visqueuse et une distribution de vorticité régulière, associée à des rapports d'aspect plus représentatifs du sillage des voilures portantes. Cette analyse de stabilité a confirmé l'existence d'instabilités 2D pour les dipôles contra-rotatifs de type LOD.*

*L'analyse de stabilité que nous proposons révèle que, malgré leur structure similaire, les taux de croissance des instabilités du LOD présentent des différences importantes avec ceux du LCD, que l'on rapporte ici en soulignant l'influence du rapport d'aspect  $a/b$ . Les résultats montrent une variation non-monotone des taux de croissance des modes les plus amplifiés en fonction de  $a/b$  et du nombre de Reynolds  $Re = \Gamma/\nu$ . On remarque notamment que malgré la prédominance des modes symétriques stationnaires et antisymétrique instationnaires, la nature des modes les plus amplifiés est respectivement instationnaire pour de petits  $a/b \leq 0,17$  et stationnaire à faible nombre de Reynolds.*

## Abstract

*We extend the linear stability analysis of the inviscid Lamb–Chaplygin dipole (LCD) carried out by Brion et al. [1] to a family of viscous Lamb–Oseen dipoles (LOD) for smaller aspect ratios  $a/b$ , where  $a$  is the characteristic radius of the vortices and  $b$  their separation distance.*

*Brion et al. [1] have recently discovered a new family of modes which corresponds to a large-wavelength instability with a maximum growth rate in the two-dimensional (2D) limit. Their study suggests that viscous diffusion of perturbation vorticity through the dipole oval and its advection in the wake is the leading mechanism of the instabilities. However the LCD stands as a particular model for a base flow, as it does not exhibit a viscous trail and displays a vorticity distribution with a discontinuous derivative. As for the LOD it does not have these flaws and leads to smaller aspect ratios, more relevant to the wake of lifting surfaces. Brion et al. [1] thus extended their analysis to the more regular LOD and gave a first confirmation of the persistence of the LCD 2D instability on a particular sample among the family of LODs.*

*The stability analysis described in the present study reveals that despite a similar structure, the twodimensional modes of the LOD presents significantly different growth rates than those of the LCD. We focus on the influence of the dipole aspect ratio and on the vortex Reynolds number on the characteristics of the unstable 2D modes. The results show*

*that the growth rate of both antisymmetric and symmetric modes presents non-monotoneous variations with  $a/b$  and  $Re = \Gamma/\nu$ . Most notably, the most amplified symmetric modes are unsteady for small aspect ratios  $a/b \leq 0,17$  and the most amplified antisymmetric modes become stationary ones for small enough Reynolds numbers.*

**Mots clefs : Tourbillons, Lamb-Oseen, Stabilité linéaire**

## 1 Introduction

Un dipôle tourbillonnaire est constitué de deux tourbillons contra-rotatifs exerçant l'un sur l'autre une déformation mutuelle ainsi qu'un déplacement. En aéronautique, le différentiel de pression intrados-extrados induit la formation de deux tourbillons de bout d'aile de sens de rotation opposés, aboutissant à la formation de dipôles tourbillonnaires ou tourbillons de sillage. La réduction de la durée de vie de ces tourbillons est un objectif souhaité dans le contexte aéronautique puisqu'ils sont à la fois contraignants pour les règles de trafic aérien, car ils imposent des distances minimales de séparation, et qu'ils jouent un rôle dans l'impact du trafic aérien sur le climat en contribuant favorablement à la persistance des traînées de condensation issues des moteurs. Le mécanisme de destruction des dipôles est complexe et met en jeu de nombreuses instabilités de natures différentes qui font depuis les années 70 l'objet de recherches et de projets collaboratifs, comme le projet Européen Farwake mené dans le cadre du FP6. Depuis les premières analyses d'instabilités menées sur des dipôles tourbillonnaires par Crow [3] ou Widnall *et al.* [4], on constate une évolution des modèles ponctuels de tourbillons à des modèles plus réalistes représentant premièrement un tourbillon unique sous un champ de déformation, puis des dipôles tels que celui dit de Lamb-Chaplygin (solution analytique décrite par Meslesko [6]) ou bien des dipôles obtenus par simulation numérique (caractérisation par Sipp *et al.* [2]).

Jusqu'à présent, les instabilités prédites théoriquement, et observées expérimentalement étaient toutes 3D, présentant une longueur d'onde spatiale caractéristique selon leur nature. Récemment (2014), Brion *et al.* [1] a montré par une étude de stabilité linéaire que le dipôle de Lamb-Chaplygin (LCD) est instable à deux instabilités à très grandes longueurs d'onde présentant des croissances maximales dans la limite 2D. Cependant le LCD présente une irrégularité de la vorticité à sa frontière et une absence totale de traîne, zones dans lesquelles se déroulent d'importants mécanismes pour ces instabilités, donc une étude sur un modèle plus réaliste s'impose. Les modèles plus réalistes sont obtenus par simulation numérique de l'adaptation mutuelle de deux tourbillons contra-rotatifs de Lamb-Oseen (modèles analytiques visqueux solutions auto-similaire des équations de Navier-Stokes). On obtient ainsi une famille de dipôles de rapports d'aspect  $a/b$  répartis sur une large gamme. Le recours à cette famille de solutions pour l'écoulement de base permet d'analyser la réponse des différents dipôles à la réduction du rapport d'aspect du dipôle. Cela permet en particulier de disposer de dipôles à faible rapport d'aspect (jusqu'à 0,1) plus pertinents pour le contexte aéronautique des sillages de voilures portantes que ne l'est le LCD, dont le rapport d'aspect est de 0.42.

On consacre une première partie à la méthode numérique utilisée pour l'obtention du LOD, ainsi que celle utilisée pour l'étude de stabilité linéaire. Une attention particulière est dédiée à la caractérisation du LOD. On présente dans une seconde partie les résultats de stabilité et les mécanismes d'évolution des différentes instabilités observées.

## 2 Méthode numérique

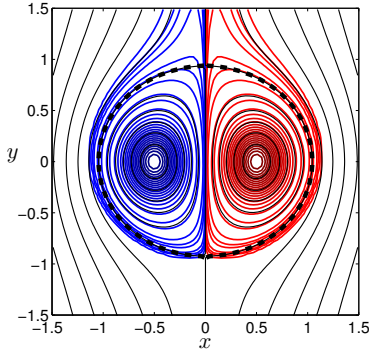
L'écoulement de base dont nous allons étudier la stabilité est obtenu par simulation numérique par méthode pseudo-spectrale de la superposition de deux tourbillons de Lamb-Oseen. On détaille d'abord la méthode utilisée pour obtenir les dipôles visqueux ainsi que leurs caractéristiques principales, puis on formule le problème linéaire permettant d'analyser la stabilité des dipôles.

Un tourbillon de Lamb-Oseen de rayon caractéristique  $a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}$  est une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes dont le champ de vitesse  $\mathbf{V}_B$  dans un repère cylindrique est défini ainsi :

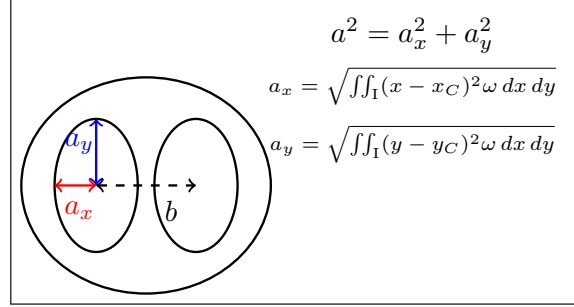
$$\mathbf{V}_B(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/r_C^2}) \quad (1)$$

L'état initial de la simulation est la superposition de deux tourbillons de Lamb-Oseen écartés d'une distance  $b$ , de rayons caractéristiques  $a_0 = 0.025$ , et de circulations opposées de norme  $\Gamma$ . On utilise une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 où les dérivées temporelles sont calculées grâce à une formulation spectrale des équations de Navier-Stokes (eq. 2) pour simuler l'évolution en temps de l'écoulement. Le nombre d'onde est noté  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ,  $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k}^2$ , et le champ de vitesse dans le domaine spectral est noté  $\hat{\mathbf{V}}_B$  et le champ de vorticité  $\omega_B = \nabla \cdot \mathbf{V}_B$ .

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{V}}_B e^{\nu \mathbf{k}^2 t}}{\partial t} = P(\mathbf{k}) [\widehat{\mathbf{V}_B \times \omega_B}] e^{\nu \mathbf{k}^2 t} \quad (2)$$



(a) Lignes de courant en noir et contours de vorticité (positive et négative) pour un dipôle visqueux de rapport d'aspect  $a/b = 0.3$  examinée dans le repère en translation à la vitesse de descente des centres tourbillonnaires. La ligne pointillée représente l'ovale de Kelvin, qui est la ligne de courant attachée au point d'arrêt amont dans ce repère.



(b) Rayons caractéristiques

FIGURE 1 – Structure du LOD.

Dans le repère en translation à la vitesse de descente des centres tourbillonnaires (extrema de vorticité), le LOD (fig. 1a) est essentiellement contenu à l'intérieur d'une ligne de courant fermée, appelée ovale de Kelvin, mais présente une traîne visqueuse déployée en zone externe dans son propre sillage. Notons  $I$  et  $E$  les domaines internes et externes à l'ovale de Kelvin et  $I^*$  et  $E^*$  leurs restrictions au demi-domaine contenant la vorticité négative du champ de base. Avant de nous tourner vers l'analyse de stabilité de la famille de dipôles de type LOD, il est donc nécessaire de définir rigoureusement les caractéristiques de ces écoulements de base : les centres des dipôles et l'écart  $b$  entre les tourbillons, les rayons caractéristiques  $a_x$ ,  $a_y$  et  $a$  (fig. 1b) calculés sur  $I^*$  ainsi que la circulation interne  $\Gamma_I$  calculée sur  $I$  et la circulation externe  $\Gamma_E$  calculée sur  $E$ .

**Caractérisation de l'écoulement :** On définit : le nombre de Reynolds  $Re = \Gamma_{I^*} / \nu$ , le rapport d'aspect du dipôle  $a/b$  et le rapport d'aspect des tourbillons  $a_y/a_x$  (mesure la déformation des tourbillons), la vitesse caractéristique du dipôle  $V_d = \Gamma / 2\pi b$ , et le temps caractéristique d'advection qui en découle  $t_a = 2\pi b^2 / \Gamma$ . On définit également  $t_\nu = a^2 / \nu$  le temps caractéristique de diffusion du dipôle. On remarque (fig 2a) une bijection entre  $a_y/a_x$  et  $a/b$  et une invariance avec le nombre de Reynolds de l'écoulement (pour  $Re > 2500$ ), ce qui signifie que la structure dépend uniquement du rapport d'aspect du dipôle  $a/b$ , on peut donc générer tous les LOD à partir d'un seul calcul

à nombre de Reynolds  $Re = 2500$ .  $\Gamma_I/\Gamma_0$  et  $\Gamma_{IUE}/\Gamma_0$  représentent respectivement la fuite de vorticité de la zone interne du dipôle et la perte de vorticité sur le champ total. On remarque (fig 2b) que pour  $a/b > 0.36$ , la traîne a une quantité de vorticité présente dans sa traîne qui diffère de plus de 1% entre  $Re = 2500$  et  $Re = 5000$ . L'ordre de grandeur du rapport d'aspect des sillages d'aéronef est  $a/b \approx 0.1$ . On choisit donc d'étudier la stabilité des LODs pour  $a/b \in [0.05 : 0.36]$ . Le domaine de calcul  $L_{xy} = 12b \times 16b$  est choisi après une étude de sensibilité de la solution aux conditions de périodicité dans les deux directions. De même, nous fixons un maillage de  $N_{xy} = 2400 \times 3200$  mailles pour une résolution spatiale minimale des tourbillons telle que  $a = 5L_x/N_x$  (5 points de collocation par rayon de cœur).

On vérifie (fig 2c) que l'écoulement peut être considéré comme quasi-stationnaire dans le repère lié aux centres des tourbillons. Suivant Sipp *et al.* [2], la représentation de la solution dans le plan  $(\omega, \Psi)$  permet de vérifier la quasi-stationnarité de l'écoulement. En effet à la limite non-visqueuse, on a  $\nu = 0 \implies \partial_t \mathbf{V}_B = 0$ , ce qui implique une relation fonctionnelle entre la vorticité et la fonction de courant. L'ensemble de cette démarche de caractérisation des dipôles contrarotatifs, qui vient en préambule de l'analyse de stabilité, repose sur la détermination non-arbitraire de la vitesse d'advection du dipôle. Celle-ci est ici calculée par interpolation de la position des extrema de vorticité et de la vitesse de l'écoulement en ces points.

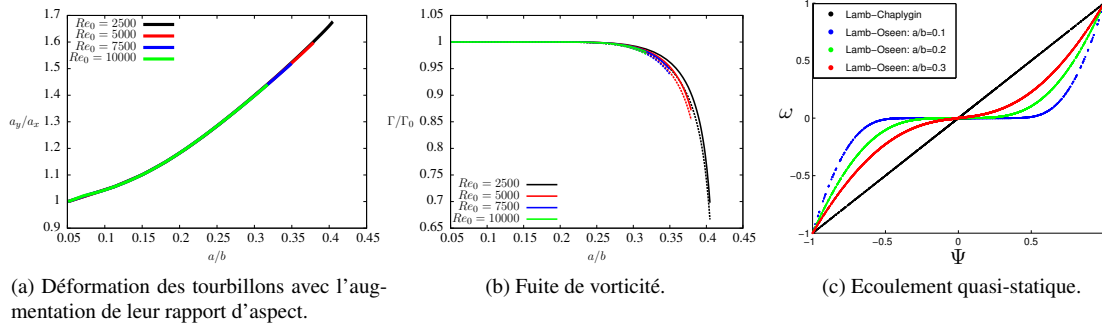


FIGURE 2 – Evolution des grandeurs caractéristiques du LOD en fonction du rapport d'aspect et vérification de l'hypothèse de quasi-staticité par le graphique  $\omega = f(\Psi)$ .

**Perturbation linéaire.** On considère un champ de base « figé » et une perturbation infinitésimale de l'écoulement de base de vitesse  $v'$  et de vorticité  $\omega' = \nabla \cdot v'$ . Le champ de base vérifiant eq. 2, et le terme  $(v' \cdot \nabla)v'$  étant négligeable devant les autres termes, la perturbation est solution de l'équation 3 qui est un problème linéaire. Si  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}$  valeur propre et  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + i\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^3$  vecteur propre du mode le plus amplifié, alors  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{Re}(\mathbf{V}e^{\lambda t})$ .

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}' e^{\nu \mathbf{k}^2 t}}{\partial t} = P(\mathbf{k})[\mathbf{V}_B \times \widehat{\omega + \mathbf{v}' \times \omega_B}] e^{\nu \mathbf{k}^2 t} \quad (3)$$

Les taux de croissance sont ensuite calculés en analysant l'évolution dans le temps de l'énergie de la perturbation à partir d'un état initial aléatoire dont l'expression converge naturellement vers l'énergie du mode le plus amplifié :

$$E(t) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = [\langle \mathbf{V}_r, \mathbf{V}_r \rangle \cos^2(\lambda_i t) + \langle \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_i \rangle \sin^2(\lambda_i t) - 2 \langle \mathbf{V}_r, \mathbf{V}_i \rangle \cos(\lambda_i t) \sin(\lambda_i t)] e^{2\lambda_r t} \quad (4)$$

Le champ de vitesse de l'écoulement de base  $\mathbf{V}_B$  est symétrique, donc le système eq 3 préserve la symétrie de la perturbation. On extrait donc séparément les modes symétriques et antisymétriques en imposant initialement une symétrie à la perturbation. Nous avons commencé par vérifier la validité de la méthode numérique autant pour l'obtention des champs de base que pour les calculs de stabilité en retrouvant les taux de croissance calculés par C.Donnadieu *et al.* [7], représentés sur la figure 3.

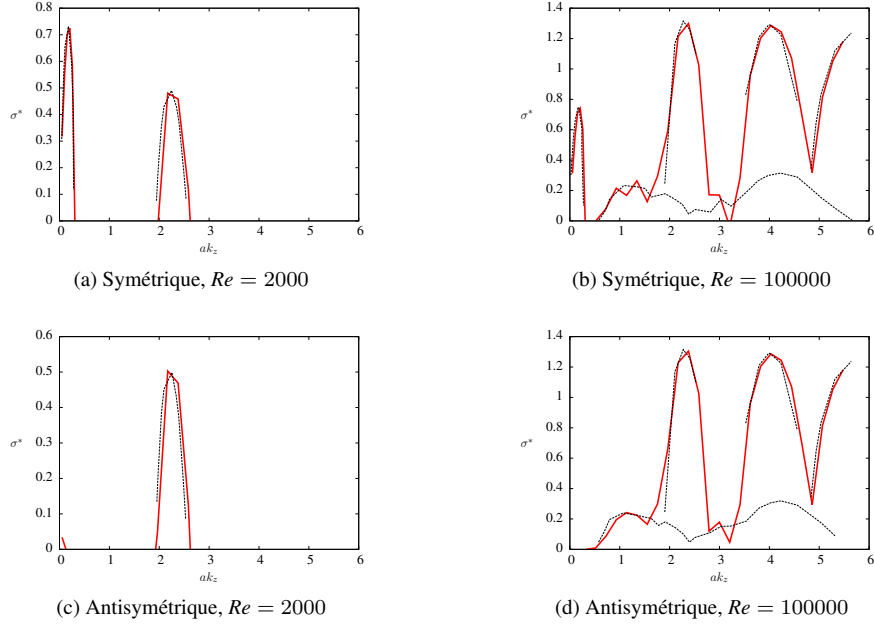


FIGURE 3 – Validation des méthodes (obtention des LOD et stabilité) sur un LOD de rapport  $a/b = 0.206$  dont les résultats de stabilité linéaire des modes symétriques et antisymétriques ont été calculés pour  $Re = 2000$  (3a-3c) et  $Re = 100000$  (3b-3d) par C.Donnadieu *et al.* [7].

### 3 Résultats

Les modes antisymétriques et symétriques 2D, notés respectivement  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{S}$ , les plus amplifiés sont extraits pour des rapports d'aspects  $a/b \in [0.05 : 0.36]$  et des nombres de Reynolds  $Re = \Gamma_{I*}/\nu$  compris entre 223 et 5000. Lorsque c'était possible, les taux de croissance modale du LCD ont été interpolés à partir des résultats de Brion *et al.* [1], et sont représentés pour  $a/b_{LCD} = 0.428$ . Le taux de croissance  $\sigma$  est ici adimensionné par le temps d'advection  $t_a$  par  $\sigma^* = \sigma t_a$  et nous avons corrigé les données de Brion *et al.* [1] dont l'adimensionnement est spécifique du LCD, i.e.  $\sigma^* = \frac{\sigma D}{U}$  et  $f^* = \frac{\omega D}{2\pi U}$ ,  $D$  et  $U$  étant respectivement le diamètre de l'ovale de Kelvin du LCD et la vitesse d'advection du LCD. Avec l'augmentation du rapport d'aspect du LOD, on observe une convergence du taux de croissance et de la fréquence de l'instabilité vers les caractéristique du mode 2D du LCD. Il s'agit des mêmes instabilités, dont la structure est détaillée dans la suite de cette partie. On en déduit que la présence d'une traîne visqueuse dans le sillage du LOD a un effet négligeable sur le développement de ces instabilités. L'annexe de Brion *et al.* [1] présente des résultats sur un LOD de rapport d'aspect  $a/b = 0.3$  mais ceux-ci sont très éloignés des nôtres et de ceux du LCD, puisque le LOD n'était pas le sujet principal de l'étude de Brion *et al.* Cet écart pourrait être dû à un champ de base mal « figé » (vitesse de descente calculée de manière imprécise).

Les instabilités que présente le LOD pour différents rapports d'aspects et différents nombres de Reynolds sont très riches ; bien que pour de grands rapports d'aspects les résultats soient similaires à ceux analysés sur le LCD, on montre que, dans le cas de l'instabilité symétrique, il existe, à nombre de Reynolds fixé, un rapport d'aspect de taux de croissance maximum. En revanche les taux de croissance et fréquences des instabilités antisymétriques croissent avec le rapport d'aspect pour  $Re \geq 1280$ , et on observe notamment une famille de modes antisymétriques à valeurs propres réelles (instabilités « stationnaires »), pour de faibles  $a/b$  et faibles  $Re$ .

Dans la suite, on présente d'abord les mouvements induits par les instabilités antisymétriques puis symétriques, puis nous analysons leurs mécanismes de croissance pour proposer une première analyse des variations des taux de croissance et fréquences observées sur la figure 4.

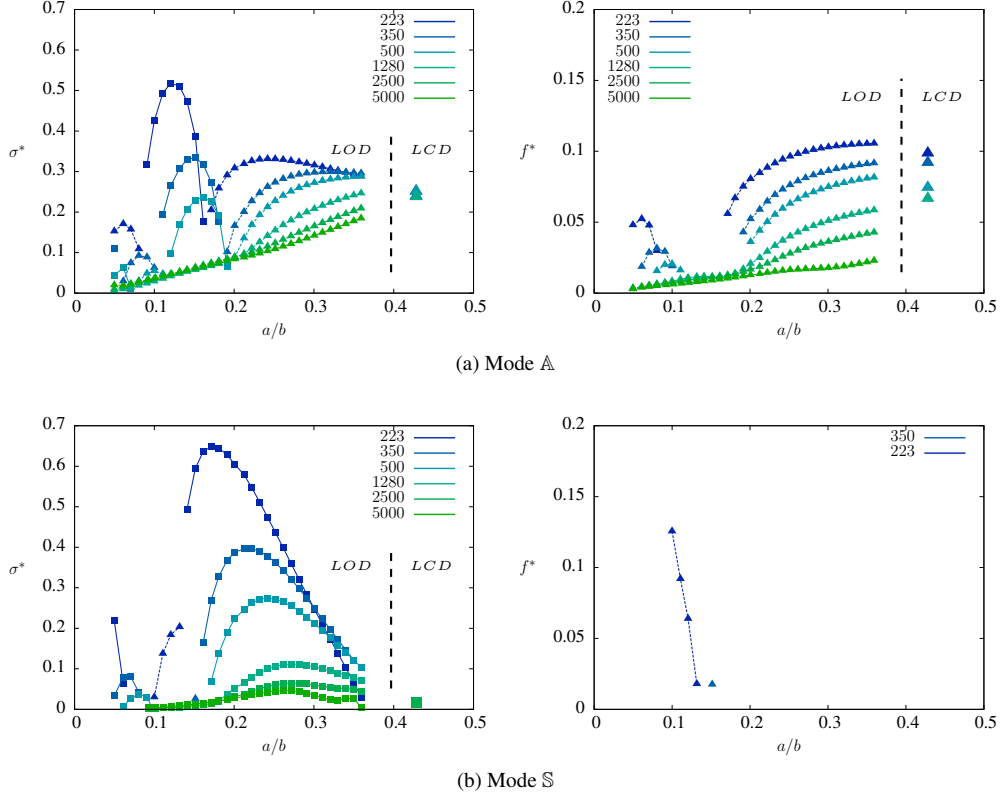
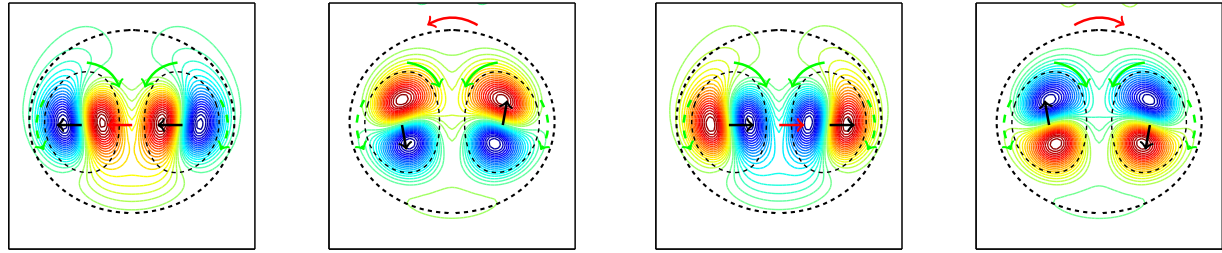


FIGURE 4 – Taux de croissance  $\sigma^* = \sigma 2\pi b^2 / \Gamma$  et fréquences  $f^* = fb^2 / \Gamma$  pour les modes  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{S}$  du LOD en fonction de  $a/b$  pour différents  $Re$ . Modes « oscillants » (à valeur propre complexe) : courbes pointillées et des marqueurs triangulaires. Modes « stationnaires » (à valeur propre réelle) : courbes continues et marqueurs rectangulaires. Les taux de croissance et fréquences des modes calculés sur le LCD par Brion *et al.* [1] sont aussi représentés.

### 3.1 Structures des instabilités et déplacements induits

Toutes les instabilités 2D relevées sur le LOD présentent des modes azimutaux  $m = 1$  centrés sur les cœurs des tourbillons et sont essentiellement des instabilités dites « de déplacement ». La structure de la perturbation est décrite par les lignes iso-vorticité, vorticité positive et négative respectivement en rouge et bleu. On représente également le dipôle (champ de base) en lignes pointillées par la limite de sa zone de recirculation interne I et les lignes iso-vorticité correspondant à  $\omega_B(x, y) = \pm 10\% \max |\omega_B|$ . Les flèches noires indiquent les déplacements engendrés par la perturbation sur les centres des tourbillons et les flèches rouges les translations et rotations induites par le dipôle de base. Les flèches vertes pointillées indiquent le sens de rotation de la perturbation (lorsqu'elle est instationnaire) et les flèches vertes pleines le sens de rotation des tourbillons.

### 3.1.1 Modes $\mathbb{A}$



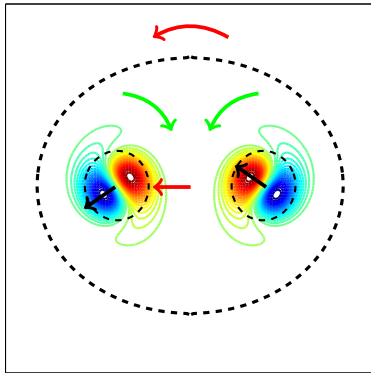
(a) Déplacement vers la gauche.

(b) Rotation négative.

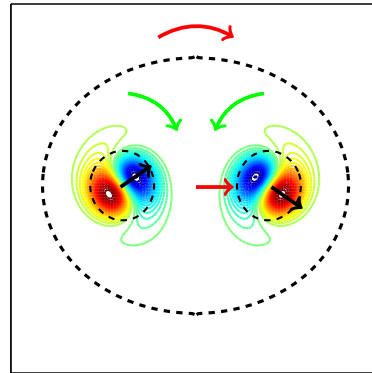
(c) Déplacement vers la droite.

(d) Rotation positive.

FIGURE 5 – Instabilité antisymétrique instationnaire pour  $a/b = 0.3$  et  $Re = 223$ .



(a) Rotation positive du dipôle et translation vers la gauche.

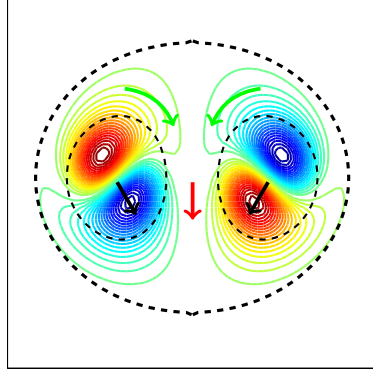


(b) Rotation négative du dipôle et translation vers la droite.

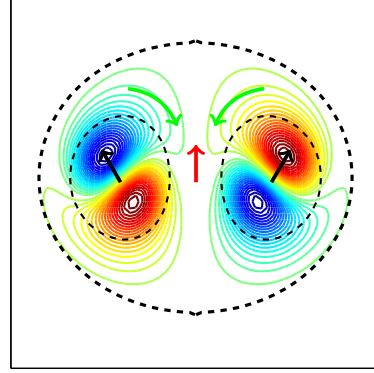
FIGURE 6 – Instabilités antisymétriques stationnaires pour  $a/b = 0.15$  et  $Re = 223$ .



### 3.1.2 Modes S

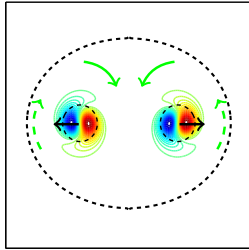


(a) Rapprochement et déplacement vers le bas.

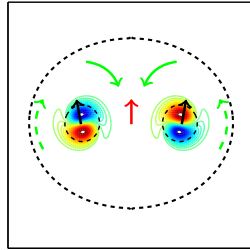


(b) Eloignement et déplacement vers le haut.

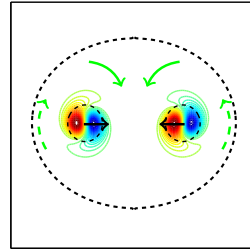
FIGURE 7 – Instabilités antisymétriques stationnaires pour  $a/b = 0.15$  et  $Re = 223$ .



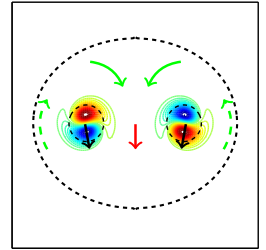
(a) Ecartement.



(b) Déplacement vers le haut.



(c) Rapprochement.



(d) Déplacement vers le bas.

FIGURE 8 – Instabilité antisymétrique instationnaire pour  $a/b = 0.3$  et  $Re = 223$ .

## 3.2 Mécanismes de croissance.

Afin d'identifier précisément les mécanismes qui permettent la croissance de ces instabilités, on cherche l'origine de la croissance de l'entrophie en faisant apparaître les différents termes contributeurs à la variation en temps de la vorticité de la perturbation. Celle-ci vérifie eq. 5.

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = -(\mathbf{V}_B \cdot \nabla) \omega' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \omega_B + \nu \Delta \omega' \quad (5)$$

Soit  $Z = \iint_S \omega'^2 dS$  l'entrophie de la perturbation linéaire. On peut faire apparaître son évolution temporelle dans l'équation de vorticité 2D linéarisée en multipliant celle-ci par  $\omega'/2$ . On obtient :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \iint_S \frac{\omega'}{2} [-(\mathbf{V}_B \cdot \nabla) \omega' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \omega_B + \nu \Delta \omega'] dS \quad (6)$$

On note dorénavant  $A_1 = -(\mathbf{V}_B \cdot \nabla) \omega'$ ,  $A_2 = -(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \omega_B$  et  $A_3 = \nu \Delta \omega'$ , et on définit  $\sigma_i = \frac{1}{Z} \iint_S \frac{\omega'}{2} A_i dS$ . Le taux de croissance  $\sigma = \sum_1^3 \sigma_i$ .

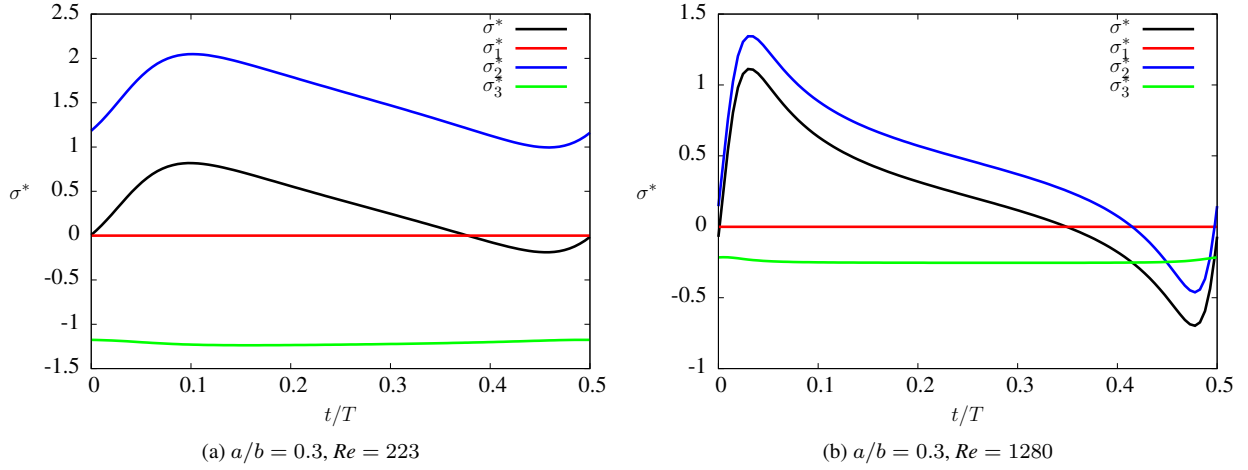


FIGURE 9 – Évolution des différents termes de contribution au taux de croissance de l’instabilité antisymétrique instationnaire adimensionnés par le temps caractéristique d’advection du dipôle :  $2\pi b^2/\Gamma$ , pour deux nombre de Reynolds 223 et 1280, sur une demi-période de l’oscillation ( $T$  représente la période pour l’ensrophie et la demi-période de l’évolution de la perturbation).

L’analyse des différentes contributions à la croissance de l’entrophie est premièrement axée sur l’instabilité antisymétrique instationnaire, mais on verra que les mêmes mécanismes permettent d’expliquer la croissance des autres instabilités. On constate que le terme  $A_1$  d’advection de la vorticité de la perturbation par le champ de base ne contribue pas à la croissance de l’entrophie : chaque tourbillon engendre la rotation pure des perturbations autour de leur centre sans créer ou dissiper d’énergie. Le terme  $A_3$  représente la diffusion visqueuse de vorticité et  $\sigma_3$  toujours négatif mesure le taux de dissipation de l’entrophie dans le domaine. On identifie donc le seul terme contributeur à la croissance de l’entrophie comme étant  $A_2$ , qui représente donc l’advection de la vorticité du champ de base par la vitesse de perturbation.

Deux mécanismes interviennent dans l’augmentation du terme  $A_2$ , un mécanisme de déformation et diffusion qui agit de manière permanente, et un mécanisme lié au champ de déformation mutuelle exercé par les tourbillons (figure 10) qui intervient seulement quand la perturbation est orientée sur les directions de compression des tourbillons. En effet l’augmentation brusque de  $\sigma_2$  (et donc de  $\sigma$ ) est basée sur un temps caractéristique d’advection du dipôle ( $2\pi b^2/\Gamma$ ) tandis que le reste de l’évolution obéit à un temps caractéristique visqueux ( $a^2/\nu$ ), c’est pourquoi sur la demi-période présentée pour  $Re = 1280$  et  $Re = 223$  sur la figure 9. Le mécanisme lié au champ de déformation mutuelle est décrit par Moore & Saffman [8] qui montrent qu’un champ de contrainte imposé à un tourbillon seul le rend instable à de nombreuses déformations 2D de modes azimutaux  $m = 1$  pour les rapports d’aspect que nous traitons avec les LODs et le LCD. La figure 10 représente les taux de contraintes (compression, dilatation) dans la direction radiale :  $\tau_R = \mathbf{e}_R \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_R$ .

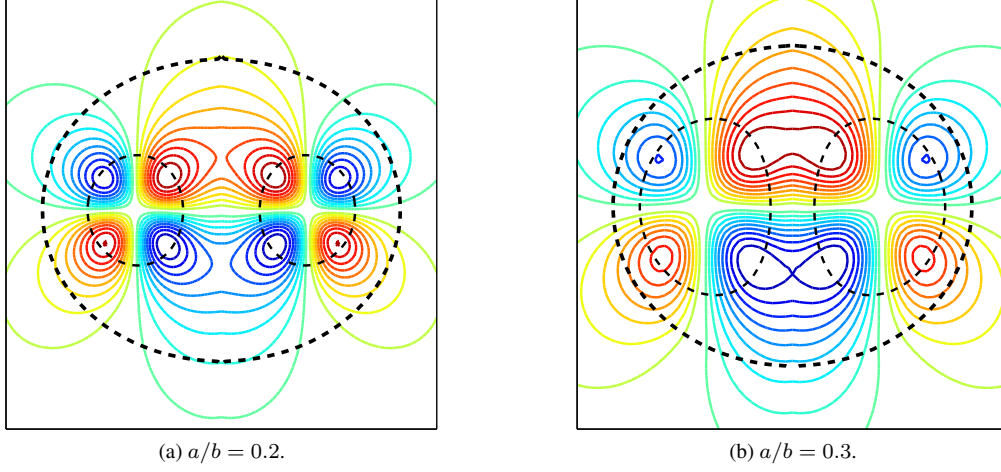


FIGURE 10 – Taux de contraintes  $\tau_R$  dans la direction radiale des tourbillons.

### 3.2.1 Mécanisme de déformation et diffusion

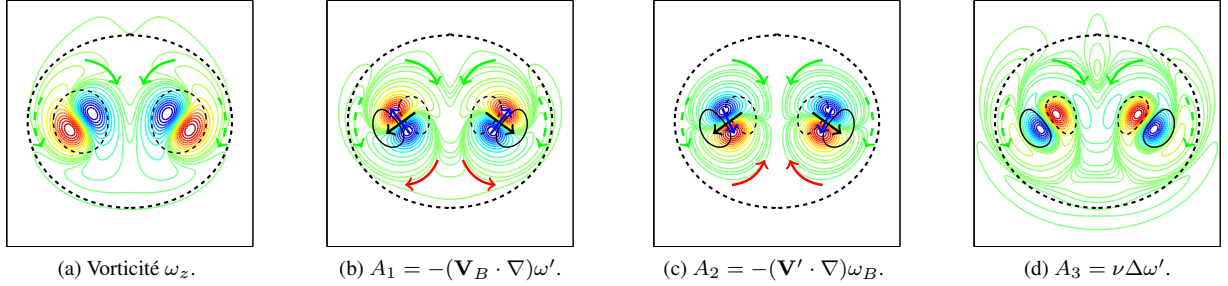


FIGURE 11 – Représentation des termes contributeurs à l'évolution en temps de la vorticité de l'instabilité antisymétrique instationnaire pour  $a/b = 0.2$ ,  $Re = 223$  et  $t/T = 0.2$ . Pour les figures 11b, 11c, 11d, on représente la perturbation par les lignes d'iso-vorticité  $\omega(x, y) = \pm 10\% \omega_{min}$  en lignes pointillées et  $\omega(x, y) = \pm 10\% \omega_{max}$  en lignes continues. Les flèches vertes pleines et pointillées représentent respectivement le sens de rotation des tourbillons et celui de la perturbation. Les flèches rouges pleines représentent les rotations induites pas les termes  $A_1$  et  $A_2$ . Les flèches noires et bleues relient respectivement les minimums aux maximums de la perturbation et des termes  $A_1$  et  $A_2$  sur chaque tourbillon.

La figure 11 permet de rendre compte d'un mécanisme de déformation de la perturbation sous l'influence de la diffusion et de l'advection de la perturbation par le champ de base vers la périphérie des tourbillons (termes  $A_1$  et  $A_3$ ) qu'on identifie comme la principale cause des différentes instabilités relevées sur le LOD et le LCD et qu'on nomme mécanisme de « déformation et diffusion ». En effet, en périphérie des tourbillons  $A_2 \ll A_1$  car le champ de vitesse de la perturbation tend vers 0, tandis que le champ de base tend vers un écoulement à vitesse constante à l'extérieur. Le sens de rotation imposé par  $A_1$  dans cette zone couplé à la diffusion crée la structure en spirale présente sur toutes les instabilités observées (figures 5, 6, 7, 8). Cette déformation de la structure de la perturbation implique que le terme  $A_2$ , en plus de la rotation, est créateur d'entrophie. C'est ce qui est représenté de manière simplifiée sur la figure 11 pour les termes  $A_1$  et  $A_2$ . Si le produit scalaire entre les vecteurs bleu et noir est positif, le terme crée de l'entrophie, s'il est nul il s'agit d'une rotation pure à l'image de l'action de  $A_1$ , et s'il est négatif, le terme dissipe de l'entrophie.

### 3.2.2 Évolution des taux de croissance et fréquences des instabilités 2D

De manière générale, plus  $a/b$  est grand, plus le dipôle est déformé, donc plus le rôle de la direction de compression est important. De même, plus le nombre de Reynolds est élevé, moins le mécanisme de déformation et diffusion est important. Lorsque  $a/b \rightarrow \infty$ , la perturbation présente un écoulement externe permettant  $A_1 \sim -A_2$  et de même pour  $a/b \rightarrow 0$  car la perturbation est située essentiellement vers le centre des tourbillons où le déséquilibre entre  $A_1$  et  $A_2$  n'intervient pas, et où on a donc aussi  $A_1 \sim -A_2$ . Alors à nombre de Reynolds constant, le mécanisme de déformation et diffusion est nul lorsque  $a/b \rightarrow 0$  et faible lorsque  $a/b$  grand. C'est pour des rapports d'aspects moyens qu'il est important.

A partir de ces raisonnements, on identifie aisément sur la figure 4, que l'instabilité symétrique, dont la structure est pourtant orientée dans les directions de compression, est issue du mécanisme de déformation et diffusion. De même, l'apparition d'instabilités « stationnaires » antisymétriques correspond à des rapports d'aspects  $a/b \approx a/b_c$ , et on observe ainsi des instabilités régies uniquement par le mécanisme de déformation et diffusion. Sur ces cas, une étude plus poussée révèle la présence du mode A instationnaire à taux de croissance plus faible que pour les modes stationnaires. Quant aux fréquences relevées pour les modes antisymétriques, elles sont liées à la mise en rotation de la perturbation par le mécanisme de déformation et diffusion et on remarque donc que plus le nombre de Reynolds est faible, plus elles sont importantes.

### 3.2.3 Rôle d'induction de la traîne visqueuse de la perturbation

Brion *et al.* [1] ont identifié que la vorticité de la perturbation relâchée dans l'écoulement externe induisait un champ de vitesse qui jouait un rôle de croissance de la perturbation en raison d'un déphasage de l'ordre de  $T/4$ . Nous montrons (figure 12) que malgré la contribution non-négligeable pour de faibles nombres de Reynolds, le mécanisme de croissance prépondérant est bien situé dans la zone de recirculation du dipôle. On note  $\mathbf{v}'_{\text{E}}$  et  $\mathbf{v}'_{\text{I}}$  respectivement les vitesses issues des vorticités externe et interne de la perturbation.  $A_{2\sim\text{E}}$  et  $A_{2\sim\text{I}}$  sont les termes issus de  $\mathbf{v}'_{\text{E}}$  et  $\mathbf{v}'_{\text{I}}$ , et on définit ainsi logiquement  $\sigma_{2\sim\text{E}}$  et  $\sigma_{2\sim\text{I}}$ .

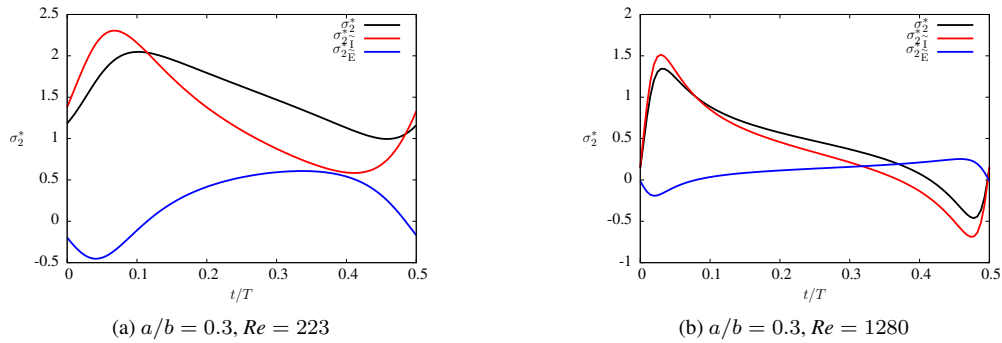


FIGURE 12 – Evolution des différents termes de contribution à  $\sigma_2$  de l'instabilité antisymétrique instationnaire adimensionnés par le temps caractéristique d'advection du dipôle :  $2\pi b^2/\Gamma$ , à 2 nombres de Reynolds sur une demi-période.

## 4 Conclusion

Le dipôle de Lamb-Oseen (LOD) est un modèle de dipôle plus proche de l'écoulement dans les sillages de voilures portantes. L'étude de ses caractéristiques de stabilité linéaire bidimensionnelle présente une très bonne cohérence avec celle du dipôle de Lamb-Chaplygin (LCD) due à Brion *et al.* [1], mais elle permet une analyse paramétrique de l'effet

du rapport d'aspect qui nous a permis d'identifier plus aisément les mécanismes des modes d'instabilité symétriques et antisymétriques. L'analyse des termes intégraux issus de l'équation de la perturbation de vortacité met en évidence les sources de création d'ensrophie et fournit un guide pour identifier les mécanismes de croissance. Nous en avons proposé deux : la conséquence de la diffusion visqueuse sur la structure spatiale de la perturbation étant le principal moteur des différentes instabilités et un mécanisme d'amplification des perturbations de modes azimutaux  $m = 1$  orientés dans la direction de compression des tourbillons identifié précédemment par Moore & Saffman [8]. Le scénario de fuite visqueuse et rétroaction sur le dipôle proposé par Brion *et al.* [1] n'apparaît pas comme une contribution majeure à la croissance des instabilités.

La diffusion visqueuse étant donc le facteur principal de ces instabilités 2D, nous pouvons dès à présent affirmer que les domaines d'applications éventuels correspondent à des écoulements à faible nombre de Reynolds. Il s'agit ensuite d'étudier les limites de l'approche de champ de base stationnaire ainsi que l'évolution non-linéaire de ces perturbations. L'instationnarité du LOD est liée à la viscosité, et a pour effet une augmentation lente du rapport d'aspect. Les instabilités relevées ont des structures proches pour des rapports d'aspects proches, l'instationnarité du dipôle ne devrait donc pas entraver le développement de celles-ci. En revanche les tentatives de simulation directe en superposant à l'état initial le champ de base et la perturbation ont été infructueuses en révélant une stabilisation rapide du dipôle dans une nouvelle direction d'advection. Enfin, l'étude de ces instabilités en milieu stratifié en densité dont l'influence est importante sur certaines instabilités 3D, demeure à étudier.

## Références

- [1] V. Brion, D. Sipp & L. Jacquin *Linear dynamics of the Lamb-Chaplygin dipole in the two-dimensional limit*. (2014), Phys. Fluid. **26** (6), 064103.
- [2] D. Sipp, L. Jacquin & C. Cossu *Self-adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles*. (2000), Phys. Fluid. **12** (2), 245–248.
- [3] S.C. Crow *Stability theory for a pair of trailing vortices*. (1970), AIAA journal, **8** (12), 2172–2179.
- [4] S.E. Widnall, D.B. Bliss, & C.Y. Tsai. *The instability of short waves on a vortex ring*. (1974), J. Fluid Mech. **66** (01), 35–47.
- [5] T. Lewke & C.H.K. Williamson. *Cooperative elliptic instability of a vortex pair*, J. Fluid Mech. **360** (1998), 85–119.
- [6] V.V. Meleshko & G.J.F van Heijst. *On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid* (1994), J. Fluid Mech. **272**, 157–182.
- [7] J.M. Chomaz, C. Donnadieu, S. Ortiz & P. Billant. *Three-dimensional instabilities and transient growth of trailing vortices*. (2006), In APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts (Vol. 1).
- [8] D.W. Moore & P.G. Saffman. *The instability of a straight vortex filament in a strain field*. (1975) Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences 346.1646 : 413–425.